Lundi 13 oct 2014

Les fonctions

I - Généralité :

Def :

$$f : u \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe} \in \mathbb{R}\}$$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(0^+) = \frac{1}{0^+} = +\infty \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$f(x) = \sqrt{1-x}$ $\quad 1 - x \geq 0 ; \; x \leq 1 . \; D_f =]-\infty, 1]$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $\quad D_f =]-\infty, 1[$

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad 1 - x^2 = (1-x)(1+x) \geq 0 \quad D_f = [-1, 1]$

$g(x) = \sqrt{x^2-1}$ $\quad D_f =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$

$f(x) = \text{Log}(x+1) ; \; D_{f_{Log}}]-1, +\infty[$

Rappelle : $D_{f_{Log}} =]0, +\infty[$

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$D_{f \frac{1}{\sin x}} \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi\}$
$k \in \mathbb{Z}$

$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$D_{f \frac{1}{\cos}} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}\}$
$k \in \mathbb{Z}$

II - Continuité :

$f : \overset{\in \mathbb{R}}{I} \rightarrow \overset{\in \mathbb{R}}{J}$

$I = [a, b]$

$\lim_{x_0} f(x) \neq f(x_0)$

f : est continue en x_0 si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$: continue sur $[a,b]$

Alors : $\forall y_0 \in [f(a), f(b)], \exists x_0 \in [a,b]$

tq : $f(x_0) = y_0$

Théorème des valeurs Intermédiaires : 2

Si $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

et $f(a) \cdot f(b) < 0$

Alors : $\exists c \in [a,b]$

tq $f(c) = 0$

Par ce que $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \overset{y_0}{0} \in [f(a), f(b)]$

$\exists x_0 = c$ tq $f(x_0) = f(c) = y_0 = 0$

Application

Démontrer par le T.V.I que l'equation $x^7+x-1=0$ à duel une solution dans $[0,1]$

On pose $f(x)=x^7+x-1$

f est continue sur $\mathbb{R}$

$\left\{\begin{array}{l} f(0)=-1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} f(0)\cdot f(1)=-1<0$

$\exists c\in[0,1]$. tq $f(c)=0$

$f(c)=c^7+c-1$. c. à-d. $c\in[0,1]$ est une solution de l'equation $x^7+x-1=0$

III - Dérivation (Dirivation d'une fonction)

Def Si $f: I \to \mathbb{R}$

$(x_0\in I)$ on dit que f est derivable en x_0 Si :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell \text{ (existe } \in\mathbb{R}) = f'(x_0)$$

la fonction

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

f' = la fonction dérivée de la fonction f.

Fonction dérivées de certaine f'

Fonction	Fonction dérivée	Domaine
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$1+tg^2 x$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{(2k+1)\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
$n\in\mathbb{N}$ $f^n(x)$	$nf^{n-1}\cdot f'(x)$	D_f
$f(D_f)\subset D_g$ $f\circ g$	$f'(g(x))\times g'(x)\cdot x$	$D_{f\circ g}$
$g\neq 0$ $\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f(x)'\cdot g(x) - f\cdot g'}{(g(x))^2}$	

Exemple: $(\sqrt{1-x^2})'$

$$g(x) = (\sqrt{1-x^2})' = ((1-x)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1-x^2)'$$

$(1-x^2)' = (-2x)$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice:

Trouver les f' dérivées de f suivantes:

1- $f(x) = \log(1-e^{2x+1})$

2- $g(x) = e^{2\sqrt{1-x^2}}$

3- $h(x) = \sqrt{1-\log(2x+1)}$

4- $i(x) = tg(2\log(x) + \sqrt{1-x^2})$

Théorème de Rolle

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $f(a) = f(b)$

Alors $\exists\, c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$

$f'(c) = 0$

$f(b) = f(a)$

a c b

Application

Nous avons déjà vu que l'équation : $x^7 + x - 1 = 0$ possède une solution dans $[0,1]$

montrer par la théorème de Rolle que cette solution est unique.

Rép Soit c_1 une solution de $x^7 + x - 1 = 0$

supposons : $\exists\, c_2 \neq c_1$ tq $c_2^7 + c_2 - 1 = 0$

On prend $f(x) = x^7 + x - 1 \Rightarrow f(c_1) = f(c_2) = 0$

T. Rolle $\Rightarrow \exists\, c_3 \in [c_1, c_2]$ tq $f'(c_3) = 0$

$f'(x) = 7x^6 + 1$ mais $7x^6 + 1 > 0 \Rightarrow f'(c_3) > 0$

Contradiction donc c_1 est unique.

Lundi 27 oct 2014

Théoreme des accroissements finits

Théoreme : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$. alors :

$(\exists c \in [a,b])$ tq $f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$

Dém : On pose $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$g(a) = f(a)$

$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$

$g(a) = g(b) \Rightarrow \exists c \in [a,b]$ tq

$g'(c) = 0 \Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

Car $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Application Démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ on a

$\frac{1}{x-1} < Log(x+1) - Log(x) < \frac{1}{x}$

Dém : On pose $f(x) = Log(x)$

$[x, x+1]$ | $a = x$, $b = x+1$

- $x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow f(x)$ est derivable

$\exists c \in]x, x+1[$ tq

$f(x+1) - f(x) = (x+1-x) f'(x)$

$$\text{Log}(x+1) - \text{Log}\,x = \frac{1}{c}$$

$$c \in]x, x+1[\Rightarrow x < c < x+1$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

<u>Donc</u> : $\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \text{Log}(x) < \frac{1}{x}$

Régle de l'Hospitale

Théorème : Si f et g sont deux fonctions : derivable sur $[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$ tq $f(x_0) = g(x_0) = 0$ Alors.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Démenstration

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \quad (f(x_0)=0,\ g(x_0)=0)$$

$$= \lim_{x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Application

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x}\right) = \lim_{0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x)'} = \lim_{0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Les suites

1) Définition

Toute Application

$f : I \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longrightarrow f(n) = U_n$

Notation:

on not $f(n) = U_n$

- $f = (U_n)_{n \in I \subseteq \mathbb{N}}$ = Une suite (numerique)
- U_n = Le terme général de la suite

Identification d'une suite:

Une suite est définie par

1. U_n en fonction de n

Exemple soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

définie par $U_n = \frac{2n+1}{n} = f(n)$

$U_1 = 3 \; ; \; U_2 = \frac{5}{2} \ldots$

Si on pose $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

$U_n = f(n)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

2. ou bien: Definie par une relation de recurence

Exemple soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 4 \end{cases}$ $\begin{cases} U_1 = 6 \\ U_2 = 16 \end{cases}$

Suite Croissante et Suite décroissante

1) Def : * on dit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :
$(\forall n \in U)$ $U_{n+1} - U_n \geq 0$ $(U_{n+1} \geq U_n)$

* on dit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
Si $U_{n+1} - U_n \leq 0$ $(U_{n-1} \leq U_n)$

Exemple.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $U_n = n^2$

$U_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n^2 = U_n$

$U_{n+1} - U_n = 2n+1 \geq 0$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \geq 0$

et (U_n) est croissante.

Exemple :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $U_n = \frac{1}{n}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)}$$

$$= -\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) < 0$$

$U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante.

Suite majorée et suite minorée

1) Def : * on dit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
s'il existe $A \in \mathbb{R}$
Tq : $U_n \leq A$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

* on dit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée
s'il existe $a \in \mathbb{R}$
Tq : $U_n \geq a$ $(\forall n \in U)$

Exemple

- la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $U_n = \frac{1}{n}$ est majorée par 1

car $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = \frac{1}{n} \leq 1$

- $\frac{1}{n} \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $U_n = \frac{1}{n}$ est minorée par 0

Théoreme :

- Toute suite croissante majorée est Convergente.
- Toute suite Croissante minorée est Convergente.

Exemple : (Exercice)

soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3} \end{cases}$$

Dementrer que cette suite est croissente ~~est~~ majorée

Exemple (Exercice)

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{U_n + 2} \end{cases}$$

Dementrer que (U_n) décroissente minorée et calculer la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Lundi 3 Nov 2014

Rep : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée $\Leftrightarrow U_n \geq 0$ ($\forall n \in U$)

Démontrons par recurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N})$ $(U_n \geq 0)$

Verification : $U_0 = 1 \geq 0$

Supposition : on suppose que $U_n \geq 0$

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{U_n + 2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N} / U_n \geq 0 \\ \text{donc } (U_n) \text{ est minorée par } 0 \end{cases}$$

Dementrons par recurence que (U_n) est décroissante :

Il faut montre par recurence que :

$$U_{n+1} - U_n \leq 0$$

1°/ Verification :

$(n=0)$: $U_1 - U_0 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \leq 0$

2°/ Supposition :

on suppose que $U_{n+1} - U_n \leq 0$

$$U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{U_{n+1} + 1}{U_{n+1} + 2} - \frac{U_n + 1}{U_n + 2}$$

$$= \frac{U_n U_{n+1} + 2U_{n+1} + U_n + 2 - U_n U_{n+1} - U_{n+1} - 2U_n - 2}{(U_{n+1} + 2)(U_{n+1} + 2)}$$

$$= \frac{U_{n+1} - U_n}{(U_{n+1} + 2)(U_{n+1} + 2)} \leq 0$$

on réisut de démonter que

si $U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow (U_{n+2} - U_{n+1}) \leq 0$

Donc (U_n) est décroissante.

Résumé : (U_n) est donc Convergente

Car elle est décroissante minorée

$$(U_n)\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) = \dfrac{U_n+1}{U_n+2} \end{cases} \quad f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$$

Théorème :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente
et $l = \lim\limits_{x\to+\infty} U_n$ avec $U_{n+1} = f(U_n)$
et f continue. Alors : la limite l
vérifie l'équation $f(l) = l$

Exemple :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n+3} \end{cases}$$

Démontrer que cette suite est convergente et trouver sa limite.

1/ U_n est croissante car (par récurrence)

Ver $U_1 - U_0 = \sqrt{5} - 2 \geq 0$ $\quad (\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2)$

supposon que : $U_{n+1} - U_n \geq 0$

$$U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{(\sqrt{U_{n+1}+3} - \sqrt{U_n+3})(\sqrt{U_{n+1}+3} + \sqrt{U_n+3})}{(\sqrt{U_{n+1}+3} + \sqrt{U_n+3})}$$

$$= \frac{U_{n+1} + 3 - U_n - 3}{(\sqrt{U_{n+1}+3} + \sqrt{U_n+3})} = \frac{U_{n+1} - U_n}{(\sqrt{U_{n+1}+3} + \sqrt{U_n+3})} \geq 0$$

$\Rightarrow (U_n)$ est croissante

- Montrons que (U_n) est majorée par 3

  C.à.d $(\forall n \in \mathbb{N})\ (U_n \leq 3)$

(par recurrence)

Verification: $U_0 = 2 \leq 3$

Supposition: on suppose que $U_n \leq 3$

$U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3} \leq \sqrt{3+3} = \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$

Si $U_n < 3 \Rightarrow U_{n+1} \leq 3 \Rightarrow (U_n)$ majorée par 0

on a (U_n) est croissante majorée donc elle est Convergante

$l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+3}$

$l = f(l) \Rightarrow l = \sqrt{l+3}$

$l^2 - l - 3 = 0$; $\Delta = 1 + 12 = 13$

$l_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $l_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}}$

Fonctions réciproques des fonctions Circulaires (Trigonométriques)

I ⟵ J

f I ⟶ J

f(b)

f(a)

a

b

Cos :

cos ℝ ⟶ [−1, 1]

1

π/2

π

−1

0

−1

1) Définition :

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

est une bijective (car elle est strictement décroissante et continue).

Donc elle possède une fonction réciproques :

$$\text{Arc}\cos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\begin{pmatrix} \text{Arc}\cos x = y \\ x \in [-1, 1] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos y = x \\ y \in [0, \pi] \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{Arc}\cos 1 = y \\ 1 \in [-1,1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos y = 1 \\ y \in [0,\pi] \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

$$\boxed{\text{Arc}\cos 1 = 0}$$

$$\begin{cases} \text{Arc}\cos 0 = y \\ 0 \in [-1,1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \\ y \in [-1,1] \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{Arc}\cos(0) = \frac{\pi}{2}}$$

II) Définition : $\underline{\text{Sin}} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est une fonction bijective (car strictement croissante et continue)

$$\text{Arc}\sin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{cases} \text{Arc}\sin x = y \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin y = x \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Arc}\sin 0 = y \\ 0 \in [-1,1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin y = x \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

$\Rightarrow$ et $\boxed{\text{Arc}\sin(0) = 0}$

$$\begin{cases} \text{Arc}\sin 1 = y \\ 1 \in [-1,1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin y = 1 \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{Arc}\sin 1 = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice :

$\text{Arc}\cos \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{Arc}\sin \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{Arc}\cos \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{Arc}\sin \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lundi 17 Nov 2014

$tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$tg : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \left]-\infty, +\infty\right[$ bijective

$tg : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \left]-\infty, +\infty\right[$

$Arc\,tg : \left]-\infty, +\infty\right[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$Co\,tg(x) : \left]0, \pi\right[\to \left]-\infty, +\infty\right[$

$Arc\,cotg : \left]-\infty, +\infty\right[\to \left]0, \pi\right[$

II) Dérivées des fonctions réciproque de fonction trigonométrique :

$$I \xrightarrow{f^{-1}} J \xrightarrow{f} I$$

$$x \longrightarrow f^{-1}(x) \longrightarrow x$$

$$\qquad\quad \| \; y$$

$f \circ f^{-1}(x) = x \Rightarrow (f \circ f^{-1}(x))' = (x)' = 1$

$f'(f^{-1}(x)) = (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)}$ avec $y = f^{-1}(x)$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} \text{ avec } y = f^{-1}(x)$$

Application $\begin{pmatrix} \text{Arc}\cos x = y \\ x \in [-1,1] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos y = 1 \\ y \in [0,\pi] \end{pmatrix}$

1) $(\text{Arc}\cos x)' = \dfrac{1}{\cos' y}$ avec $\cos y = 0$

⚠ $= -\dfrac{1}{\sin y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos y}}$

$\cos' y = -\sin y$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$\Rightarrow \sin = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$ $(\cos y \in [0,\pi]$

Donc : $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]-1,1[\\ (\text{Arc}\cos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right.$

$\forall x \in]-1,1[$

$(\text{Arc}\sin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

App : $\forall x \in [-1,1]$ on a $\text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2}$

On pose $f(x) = \text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x$

on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

On a $f'(x) = 0$ Donc f est une constante

$f(0) = \text{Arc}\sin(0) + \text{Arc}\cos(0)$

$$\begin{pmatrix} \text{Arc}\cos(0) = y \\ 0 \in [-1,1] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos y = 0 \\ y \in [0,\pi] \end{pmatrix} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \text{Arc} \sin(0) = y \\ 0 \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = 0 \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

$$\forall x \in]-1, 1[: \text{Arc} \sin x + \text{Arc} \cos x = \frac{\pi}{2}$$

Verifie que $\text{Arc} \cos(-1) + \text{Arc} \sin(-1) = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Arc} \cos(1) + \text{Arc} \sin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Donc : $\begin{cases} \forall x \in [-1, 1] : \text{on a} \\ \text{Arc} \sin x + \text{Arc} \cos x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc : $\forall x \in]-\infty, +\infty[$:

$$(\text{Arc} \, tg(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{Arc} \, tg(x))' = \frac{1}{tg'(y)} \quad \text{avec} \quad (tg(y) = x)$$

$$= \frac{1}{1 + tg^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$\forall x \in]-\infty, +\infty[$

$$(\text{Arc} \, cotg(x))' = \frac{-1}{1+x^2}$$

App : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\text{Arc} \, tg(x) + \text{Arc} \, cotg(x) = \frac{\pi}{2}$

Intégration :

I - Fonction primitive

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une f^c

on dit que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est

une primitive de f sur $[a,b]$

Si $\left((\forall x \in [a,b]) \; F'(x) = f(x) \right)$

Exemple

Fonction	Fonction Primitive	Intégralle
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arc\,tg}(x)$	$\mathbb{R}$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arc\,cotg}(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$1/x$	$\mathrm{Log}(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{Arc}\cos x$	$]-1,1[$

Remarque :

- Si F est primitive alors : $\forall \mathcal{C}^{te} \in \mathbb{R}$

$G(x) = F(x) + \mathcal{C}$ est aussi primitive de f

Car :

$G'(x) = F'(x) = f(x)$

- Si F et G deux primitive de f alors :

$(\exists \lambda \in \mathbb{R})$ tq : $F(x) = G(x) + \lambda$

- $F(b) - F(a) = G(b) + \lambda - G(a) - \lambda$

$= G(b) - G(a)$

II - Intégrale définie :

Soit f une f^c : $[a,b]$ que possède une primitive

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$

Alors $F(b) - F(a)$ est indépendant de choix F

on le note $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

l'integrale définie de a à b de $f(x)\,dx$

Exemple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} + \cos(0) = 1$$

$-(-\cos(0))$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$$

Exemple : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\text{Arc}\sin(x)]_0^1 = \text{Arc}\sin 1 - \text{Arc}\sin 0 = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ F(x) = \text{Arc}\sin x \end{cases}$$

III. Integrale indéfinie

f integrale indéfinie de f on le note.

$\int f(x)\,dx$ = represente une primitive de f

Lundi 24 Nov 2014

IV. Integrations par parties

$f \cdot g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables

alors on a

$$\int_a^b f(x).g'(x)\,dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Dem

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$f(x).g'(x) = (f(x).g(x))' - f'(x)\,g(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \int_a^b (f(x)\,g(x))'\,dx - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Exemple Trouver $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

On pose : $f(x) = x$ et $g'(x) = \cos x$

$f'(x) = 1$ et $g(x) = \sin x$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin dx = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi - 2}{2}}$$

V. Integrations par changement de variable :

$$\left.\begin{array}{l} I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{2 fcs Derivables}$$

$tq : g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$

On a : $\boxed{\int_\alpha^\beta f(g(t)) \times g'(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt}$

Dem Soit F une primitive de f

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \times g'(t) = f(g(t)) \times g'(t)$$

$$\int_\alpha^\beta (F \circ g)'(t) \, dt = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \times g'(t) \, dt$$

$$F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \times g'(t) \, dt$$

$$F(b) - F(a) = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \times g'(t) \, dt$$

$$\boxed{\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \times g'(t) \, dt}$$

Dans la pratique :

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

$x = g(t)$

$dx = g'(t) \, dt$

$g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \, g'(t) \, dt$$

Exemple

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

on pose $x = \sin t$
$dx = \cos t\, dt$
$x = 0 \Rightarrow t = 0 \Leftrightarrow \alpha$
$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta$

$\cos^2 + \sin^2 = 1$
$\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x}$
$= \cos x$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin t}\ \cos t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Donc $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$

formule trigonométrique :

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

$= 2\cos^2 a - 1$

$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

Équations Differentielles

I. 1) Définition

on appelle équation défferentielles toute équation dont l'inconnue est une fonction

Exemple :

Trouver la fonction f qui verifie

$$(2x^2+1) f''(x) + (1-x) f'(x) + 2 f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (E)$$

Notation on note $y = f(x)$ $y' = f'(x)$

$$(E) \quad (2x^2+1) y'' + (1-x) y' + 2y = \sqrt{1-x^2}$$

et $\frac{dy}{dx} = y'$

II. Équation differentielles à variables séparés

1) Def :

On appelle equation differentielle à variables séparés tout É.D. de la forme

$$h(y)\, y' = g(x)$$

h et g deux fonctions.

$$h(y)\,y' = g(x) \Rightarrow h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\Rightarrow h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

Exemple :

Résoudre l'E.D.

$$e^{y}\,y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$h(y)\,y' = g(x)$ $\begin{cases} h(y) = e^{y} \\ g(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

$$e^{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow e^{y}\,dy = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int e^{y}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$e^{y} = \mathrm{Arc\,tg}(x) + c$$

$$\mathrm{Log}(e^{y}) = \mathrm{Log}(\mathrm{Arc\,tg}(x) + c \qquad (\mathrm{Arc\,tg}(x) + c > 0)$$

$$S = \{\, y = \mathrm{Log}(\mathrm{Arc\,tg}(x) + c) \,\}$$

Verification

$$e^{y}\,y' = e^{\mathrm{Log}(\mathrm{Arc\,tg}(x)+c)}\cdot\frac{1}{(\mathrm{Arc\,tg}(x)+c)}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$= (\mathrm{Arc\,tg}(x) + c)\cdot\frac{1}{(\mathrm{Arc\,tg}(x)+c)}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$e^{y}\cdot y' = \frac{1}{1+x^2}$$

III - Equation Différentielles du 1er ordre.

Déf : C'est toute E.D. de la forme

$$h(x)y' + g(x)y = f(x)$$

avec h, g et f sont des fonctions

E.D.S.S.M (sans second membre) $\Leftrightarrow h(x)y' + g(x)y = 0$

E.D.A.S.M (avec) $\Leftrightarrow h(x)y' + g(x)y = f(x)$

Si y_1 est solution de l'E.D.S.S.M.
et y_0 une solution particulière de l'E.D.ASM
alors la solution générale de (E)
est $y = y_0 + y_1$

Car :

$$h(x)(y_0 + y_1)' + g(x)(y_0 + y_1) = \underbrace{h(x)y_0' + g(x)y_0}_{f(x)} + \underbrace{h(x)y_1' + g(x)y_1}_{0}$$

$$= f(x)$$

Pour résoudre l'E.D.S.S.M

$$h(x)y' + g(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{h(x)} dx$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{g(x)}{h(x)}\,dx$$

Equation à variables séparée

Exemple :

Résoudre l'E.D. suivante.

$$y' + xy = x^4 + 3x^2 + x$$

Sachant que $y_0 = x^3 + 1$ est une solution

$$y' + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = -x \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} = \int -x\,dx$$

$$\log y = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y_1 = e^{\left(-\frac{x^2}{2} + c\right)} \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$S = \left\{ e^{-\left(\frac{x^2}{2} + c\right)} + x^3 + 1 \; ; \; c \in \mathbb{R} \right\}$$

Lundi 1 Dec 2014

Exemple : Résoudre l'E.D.

$$(E) \quad \cos^2 x\, y' + \sin^2 x\, y = 1 + x \sin^2 x.$$

sachant que $y_0 = x + 1$ est une solution particulière de (E

1) Verifiant que $y_0 = x + 1$ est une solution :

$$\cos^2 x (x+1)' + \sin^2 x (x+1) = \cos^2 x + x \sin^2 x + \sin^2 x = 1 + x \sin$$

Il reste à trouver y_1 = la solution generale de

$$\cos^2 x\, y' + \sin^2 x\, y = 0$$

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} = -\sin^2 x\, y$$

$$\frac{1}{y}\, dy = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = -tg^2 x\, dx$$

$$\frac{1}{y}\, dy = -tg^2 x\, dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int tg^2 x\, dx + c$$

$$(tg\, x)' = 1 + tg^2 x$$

$$(tg(x))' - 1 = tg^2 x$$

$$\log y = (-tg + x) + c$$

$$(tg\, x - x)' = tg^2 x$$

$$y = e^{(x - tg\, x) + c} = e^{(x - tg\, x)} \cdot e^c = \underbrace{e^c}_{\lambda} \cdot e^{x - tg(x)}$$

$$\boxed{y_1 = \lambda \cdot e^{x - tg(x)}} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Verification

$$\cos^2 x \left(\lambda e^{(x - tg(x))}\right)' + \sin^2 x \left(\lambda e^{(x - tg(x))}\right)$$

$$= -\cos^2 x \left(tg^2(x)\right) \lambda e^{(x - tg\, x)} + \sin^2 x \left(\lambda e^{(x - tg(x))}\right)$$

$$= -\sin^2 x\, \lambda\, e^{(x - tg\, x)} + \sin^2 x\, \lambda \left(e^{(x - tg(x))}\right)$$

$$= 0$$

Donc : $\boxed{S = y_0 + y_1 = x + 1 + \lambda\, e^{(x - tg(x))}}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

IV. Equation Differentielle du second ordre :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$ $(a, b, c) \in \mathbb{R}$; f(x) est une f^c

y_1 = la solution générale de l'E.S.S.M
$ay'' + by' + cy = 0$

y_0 = une solution particulière de l'E.A.S.M
$ay'' + by' + cy = f(x)$

$$S = y_0 + y_1$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$ → equation caractéristique

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta < 0$

$z_1 = p + qi$; $z_2 = p - qi$
S.E.C

$y_1 = e^{px}(\alpha \sin qx + \beta \cos qx)$
$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$\Delta = 0$

$r_1 = r_2 = r$

$y_1 = (\alpha x + \beta)e^{r.x}$
$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$

$\Delta > 0$

r_1 et r_2 deux solution de l'E.C

$y_1 = \alpha . e^{r_1 . x} + \beta e^{r_2 . x}$ / α et $\beta \in \mathbb{R}$

Exemple : Soit l'E.D : $y'' - 6y' + 5y = 4\sin x - 6\cos x$

a) Verifie que $y_0 = \sin x$ est une solution

b) Resoudre cette E

Rep

$(\sin x)'' - 6(\sin x)' + 5(\sin x) = -\sin x - 6\cos x$
$+ 5\sin x = 4\sin x - 6\cos x$

Donc y_0 est une S.P

S.P. solution particulière

y_1 est solution de $y'' - 6y' + 5y = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \qquad \Delta = 36 - 20 = 16 > 0$

$r_1 = \frac{6-4}{2} = 1 \quad ; r_2 = \frac{6+4}{2} = 5$

$\Rightarrow y_1 = \alpha e^{x} + \beta e^{5x} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

Donc : $\begin{cases} S = y_0 + y_1 = \sin x + \alpha e^{x} + \beta e^{5x} \\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \end{cases}$

Exemple 2 $(E) : y'' - 2\sqrt{3}\, y' + 3y = 3\,\text{Arctg}\, x - \frac{2\sqrt{3}x^2 + 2x + 2\sqrt{3}}{(1+x^2)^2}$

a) Verifier que $y_0 = \text{Arctg}\, x$ est une S

b) En déduire la S.G de (E)

G : générale

a) ? (la même méthode)

b) y_1 ?

$y'' - 2\sqrt{3}\, y' + 3y = 0 \Rightarrow$ E.C. $x^2 - 2\sqrt{3}\, x + 3 = 0$

$\Delta = 12 - 12 = 0 \qquad r = \sqrt{3}$

$\Rightarrow y_1 = (\alpha x + \beta)\, e^{\sqrt{3}x}$

Exemple 3.

$$(E)\quad y'' - 2\sqrt{2}y' + 3y = 3e^{2\sqrt{2}x}$$

a) Verifier que $y_0 = e^{2\sqrt{2}x}$ une S de (E)

b) En déduire la S. G de (E)

a) $(e^{2\sqrt{2}x})'' + 2\sqrt{2}(e^{2\sqrt{2}x})' + 3e^{2\sqrt{2}x}$

$= 2\sqrt{2}(e^{2\sqrt{2}x})' - 8e^{2\sqrt{2}x} + 3e^{2\sqrt{2}x}$

$= 8e^{2\sqrt{2}x} - 8e^{2\sqrt{2}x} + 3e^{2\sqrt{2}x}$

$= 3e^{2\sqrt{2}x}$

y_1 est S. de $y'' - 2\sqrt{2}y' + 3y = 0$

E.C $= x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 8 - 12 = -4 \quad \sqrt{\Delta} = 2i$

$z_1 = \dfrac{2\sqrt{2}+2i}{2} = \sqrt{2} + i$ et $z_2 = \sqrt{2} - i$

$p = \sqrt{2}$ et $q = 1 \Rightarrow y_1 = e^{\sqrt{2}x}(\alpha \sin x + \beta \cos x)$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$

Donc

$$S = y_0 + y_1 = e^{2\sqrt{2}x} + e^{\sqrt{2}x}(\alpha \sin x + \beta \cos x) \quad / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$$

Algèbre

Lundi 8 Dec 2014

Système d'équation Déterminant Matrice.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

C'est un système de m équation et n inconnues

Méthode de Cramer

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 3 = -7$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$A\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ C'est une matrice de m lignes et n colonnes

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C'est une matrice de 3 lignes et 3 colonnes. C'est une matrice Carrée.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$ C'est une matrice de m lignes et 1 colonne

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{1,2}x_1 + \cdots + a_{1n}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff A \cdot X = B$$

Dans $\mathbb{R}$ $\quad a \neq 0$

$$a \cdot (a^{-1}) = 1$$

$$a^{-1}\left(\frac{1}{a}\right) ax = \frac{1}{b} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

$$a^{-1}(a.x) = \cdot b \Rightarrow x = (a^{-1})b$$

$$(A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \boxed{X = A^{-1}B}$$

Calcul Matriciel

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} + \cdots + a_{1.n} \\ \vdots \\ a_{m1} + \cdots + a_{m.n} \end{pmatrix} \in M_{m.n}$$

$$X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in M_{m.1}$$

$$(M_{m.n} ; +)$$

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & \cdots & a_{1.n} \\ \vdots & & \\ a_{m.1} & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1.1} + \cdots + b_{1.n} \\ \vdots \\ b_{m.1} \cdots b_{m.n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} + \cdots a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} \cdots a_{m.n}+b_{m.n} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{R} : + ; \cdot ; / ; -)$$

$(M_{m.n} ; \cdot)$ multiplication par un Scalaire.

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda . A = \lambda . \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1.n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{m.n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} \cdots \lambda a_{1n} \\ \vdots \\ \lambda a_{m1} \cdots \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$-3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplication de 2 Matrices

$$A \in M_{m.n} \quad B \in M_{n,k} \Rightarrow A.B \in M_{m.k}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1k} \\ a'_{21} & \cdots & a'_{2k} \\ \vdots & & \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nk} \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1k} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot a'_{11} + \cdots + a_{1.n} \cdot a'_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Exemple

$$M_{3.3} \quad M_{3.2} = M_{32}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplication de 2 Matrice

$A \in M_{m.n}$. $X \in M_{n.1}$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{m.n}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Leftrightarrow \text{Systeme} \begin{cases} a_{1.1}x_1 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Systeme

A^{-1} $x.1 = x$ $\Updownarrow$ $x^{-1}.x = 1$

$Ax = B$

$X = A^{-1}.B$

$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Inverse d'une matrice

$(n = 2, m = 2)$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{com}(A)$$

déterminant $\det A = ab - bc$

Comatrice $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ${}^t\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Exemple $^t\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

$\text{Com}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

Exemple résoudre le système suivant par le calcul matriciel

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -3x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \overset{A}{\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}} \overset{X}{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}}$$

$\text{Com}\,A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$^t\text{com}\,A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$\det A = -5 \quad \Leftarrow (1.1 - 2.3)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\text{com}(A) = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}10 = 6+4\\ 15 = 12+3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10\\ 15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ -3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -2 \\ y = -3 \end{matrix}$$

$$S = \{(-2, -3)\}$$

Exemple : Résoudre avec la calcul matriciel

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$A = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$

Programe de Math S.V.T S.1

Analyse : Les fonctions

I - Generalite sur les fonctions
II - Continuité
III - Dérivation
IV - Intégration
V - Equation Différentiation

Algèbre :

I - Les Matrices.
II - Détermination
III - Cystème Equation